Olympiades Omar Alkhayam (O2A)
ENSAM, Meknès, 2010

Egalités & Inégalités

M. Ouzahra
(CPA-ENS, Fes)
(I2R, Faculté des Sciences, Meknès)
m.ouzahra@yahoo.fr.

Table des matières

1 Introduction

Dans ce chapitre, on donnera des rappels sur les propriétés essentielles des nombres réels ainsi que les inégalités classiques qu'on utilise généralement dans la résolution des problèmes d'olympiades. On étudiera aussi quelques équations et inéquations fonctionnelles. On présentera des applications appropriées des différents résultats. Elles sont accompanées d'exercices corrigés, et regroupés par thèmes. On terminera par des problèmes d'entrainement tirés des différentes compétitions qui ont lieu de par le monde, ainsi que le sujet qui a été posé aux olympiades de mathématiques O2A-2010, ENSAM, Meknes.

2 Propriétés de l'ensemble des nombres réels

2.1 Encadrement, Majorant, Minorant

$\mathbb{R}$ est archimédien : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $ny \geq x$.

Autrement dit, en se déplaçant sur la droite réelle et en faisant des bonds de longueur y fixé, on peut toujours dépasser n'importe quel nombre réel arbitrairement choisi x.

Théorème : *Toute partie E de $\mathbb{R}$, qui est non vide et majorée admet un plus petit majorant noté $\sup E$ et appelé borne supérieure de E.*

$\sup E$ *se caractérise par :*

i) $\forall x \in E,\ x \leq \sup E,\ (i.e.\ \sup E$ *est un majorant de* E*)*

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ \ x > \sup E - \varepsilon,\ (i.e.\ \sup E - \varepsilon$ *n'est pas majorant de* E*).*

De façon analogue, si E est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, on définit la borne inférieure $\inf E$ *de E comme étant le plus grand des minorant de E, qu'on peut caractériser par :*

i) $\forall x \in E,\ x \geq \inf E$

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ x < \sup E + \varepsilon.$

Remarques : *1) Le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien traduit le fait que l'ensemble N n'est pas majoré dans $\mathbb{R}$.*

2) Si $\sup E \in E$ (respectivement $\inf E \in E$), alors on parle du plus grand (respectivement plus petit) élément de E et est aussi noté $\max E$ (respectivement $\min E$).

Exercices : 1) Déterminer le meilleur encadrement de $Z = x^2 - 2xy - 2y^2$ pour $x, y \in [1, 3]$, (i.e. celui de plus petite amplitude. Indication : remarquer que $Z = (x - y)^2 - 3y^2$).

2) Soient x et y deux réels tels que $|x| \leq \dfrac{1}{2}$ et $|y| \leq 1$. Montrer que

$$|4x^2y - y - x| \leq \frac{17}{16}$$

(Indication : vérifier que $|4x^2y - y - x| \leq 1 - 4|x|^2 + |x|$).

3) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < b$. On considère l'ensemble

$$E = \{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\ /\ (x, y) \in [a, b]^2\}\cdot$$

Donner le meilleur encadrement des éléments de E.

Problème 1 : [2]. On partage l'ensemble $\{1, 2, .., 2n\}$ en deux partie $\{a_1, .., a_n\}$ et $\{b_1, .., b_n\}$ tels que $b_1 > b_2 > ... > b_n$ et $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Montrer que $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$.

Solution : On va montrer que pour tout $1 \le i \le n$, on a : $\sup(a_i, b_i) \in [n+1, 2n]$ et $\inf(a_i, b_i) \in [1, n]$. Supposons que $\exists k$ tel que $\sup(a_k, b_k) \le n$. L'intervalle $[1, \sup(a_k, b_k)]$ contient les éléments $a_1, .., a_k$ et $b_k, .., b_n$ qui sont en nombre $n+1$, ce qui est impossible puisque $[1, \sup(a_k, b_k)] \subset [1, n]$.

De même on montre que $\inf(a_i, b_i) \in [1, n],\ i = 1, .., n$.

On a $|a_i - b_i| = \sup(a_i, b_i) - \inf(a_i, b_i)$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^{n} \sup(a_i, b_i) - \sum_{i=1}^{n} \inf(a_i, b_i)$$

Or on a $\{\sup(a_i, b_i) \ / \ 1 \le i \le n\} = [n+1, 2n]$ et $\{\inf(a_i, b_i) \ / \ 1 \le i \le n\} = [1, n]$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} \sup(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} (n+i) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \inf(a_i, b_i) = \sum_{i=1}^{n} i$$

d'où $\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| = n^2$.

2.2 Partie entière

Théorème et définition : *Pour tout réel x, il existe un plus grand entier (noté $E(x)$ ou $[x]$) qui lui est inférieur ou égal. Ceci se traduit par la double inégalité : $E(x) \le x < E(x) + 1$.*

$E(x)$ s'appelle partie entière de x.

Remarque : Si x est un entier, alors $E(x) = x$.

Exercices : 1) Montrer que pour tous réels $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $E(x+y) = E(x) + E(y) + r,\ r \in \{0, 1\}$, et que si l'un d'eux est un entier, alors on a : $E(x+y) = E(x) + E(y)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(-x) = -E(x)$.

3) Donner l'entier le plus proche à un réel x au sens de la distance dans la droite réelle.

4) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $b - a \ge 1$. Montrer que $[a, b] \cap \mathbb{Z} \ne \emptyset$. (Indication : considérer $[a] + 1,\ [b]$ ou $[a] + [b - a]$).

5) Soit $A = \{x - E(x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$. Déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{k + \frac{n}{k} \ / \ k \in \mathbb{N}^*\}$. Monter que

$$\inf(E_n) = \min_{k \in \{E(\sqrt{n}), E(\sqrt{n})+1\}} (k + \frac{n}{k}).$$

7) Comparer les nombres $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}],\ [\sqrt{4n+1}],\ [\sqrt{4n+2}]$ et $[\sqrt{4n+3}]$.

Solution de 7) : Posons $k = [\sqrt{4n+1}]$. On a $k \le \sqrt{4n+1} < k+1$ et par suite $k^2 + 1 \le 4n + 2 < (k+1)^2 + 1$. On ne peut pas avoir $(k+1)^2 \le 4n + 2 < (k+1)^2 + 1$ car les deux entiers $(k+1)^2$ et $(k+1)^2 + 1$, étant consécutifs, on aura $(k+1)^2 = 4n + 2$ ce qui est impossible. On déduit que $k^2 \le k^2 + 1 \le 4n + 2 < (k+1)^2$, et par conséquent $[\sqrt{4n+2}] = k$.

On montre de même que $[\sqrt{4n+3}] = [\sqrt{4n+2}]$.

Montrons que $[\sqrt{n+1}+\sqrt{n}] = [\sqrt{4n+1}]$. Posons $k = [\sqrt{4n+1}]$.
Des relations suivantes $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 = 2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$, $4n+1 = 2n+1+2n$, et $4n+3 = 2n+1+2(n+1)$, on déduit que $4n+1 \leq (\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2 \leq 4n+3$ d'où $k \leq \sqrt{4n+1} \leq \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \leq \sqrt{4n+3} < k+1$, il s'en suit que $\sqrt{n+1}+\sqrt{n} = k$.

8) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $[\dfrac{[nx]}{n}] = [x]$ et $[\dfrac{[x]}{n}] = [\dfrac{x}{n}]\cdot$

Solution : De $n[x] \leq nx < n[x]+n$, on a (la fonction $[.]$ étant croissante) $n[x] \leq [nx] < n[x]+n$ et par suite $[x] \leq \dfrac{[nx]}{n} < [x]+1$, donc $[\dfrac{[nx]}{n}] = [x]$.
En remplaçant x par $\dfrac{x}{n}$, on obtient la deusième relation.

Problème 2 : [2]. Montrer qu'il existe un rang p à partir duquel, l'équation $[\dfrac{10^n}{x}] = 2010$ admet au moins une solution x dans $\mathbb{N}$.

Solution : On sait que pour tout $x \in N$, on a

$$[\frac{10^n}{x}] = 2010 \Leftrightarrow 2010 \leq \frac{10^n}{x} < 2011 \Leftrightarrow \frac{10^n}{2011} < x \leq \frac{10^n}{2010} \Leftrightarrow \frac{10^n}{2011} \leq x \leq \frac{10^n}{2010}, \quad \text{(dire pourquoi)}$$

$$[\frac{10^n}{x}] = 2010 \Leftarrow \frac{10^n}{2010} - \frac{10^n}{2011} \geq 1 \Leftarrow 10^n \geq 2010 \times 2011$$

On peut prendre $p = 8$.

Problème 3 : [2]. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $[x^2] = [x]^2$.

Solution : On pose $[x] = k$. On a

$$[x^2] = [x]^2 \Leftrightarrow x^2 \in [k^2, k^2+1[\Leftrightarrow |x| \in [|k|, \sqrt{k^2+1}[\Leftrightarrow x \in [|k|, \sqrt{k^2+1}[\cup]-\sqrt{k^2+1}, -|k|], k = [x].$$

Donc si x est solution de l'équation, alors $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [|k|, \sqrt{k^2+1}[\cup]-\sqrt{k^2+1}, -|k|]$.
Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, et soit $x \in [|k|, \sqrt{k^2+1}[\cup]-\sqrt{k^2+1}, -|k|]$.
Dans le cas $x \in [|k|, \sqrt{k^2+1}[$, on a $|k| \leq x < \sqrt{k^2+1} \leq |k|+1$ d'où $[x] = |k|$. D'autre part on a $x^2 \in [k^2, k^2+1[$ d'où $[x^2] = k^2 = [x]^2$.
Si maintenant $x \in]-\sqrt{k^2+1}, -|k|]$, alors $x = -|k|$ est solution, mais dans le cas $x \in]-\sqrt{k^2+1}, -|k|[$, on a $[x] = -|k|+1$ et $[x^2] = k^2$ donc x n'est pas solution.
Conclusion l'ensemble des solutions est $S = \mathbb{Z} \bigcup (\bigcup_{n \in N}]n, \sqrt{n^2+1}[)$

Problème 4 : [2]. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sum_{i=0}^{5} [2^i x] = 12345$.

Solution : On a $2^i x - 1 < [2^i x] \leq 2^i x$, $i = 0, .., 5$. En sommant terme à termes, on obtient $(2^6-1)x - 6 < 12345 \leq (2^6-1)x$, d'où $195 + \dfrac{60}{63} \leq x < 196 + \dfrac{3}{63}$. Il en découle que $[x] \in \{195, 196\}$.

1ier cas : $[x] = 196$. On a alors $[2^i x] \geq 2^i.196,\ i = 0,..,5$ d'où $12345 = \sum_{i=0}^{5}[2^i x] \geq 196.(2^6 - 1) = 196 \times 63 = 12348$, ce qui est impossible.

2ieme cas : $[x] = 195$. On a $195 \leq x < 196,\ 390 \leq 2x < 392,\ 780 \leq 2^2 x < 784,\ 1560 \leq 2^3 x < 1568,\ 3120 \leq 2^4 x < 3136,\ 6240 \leq 2^5 x < 6272$, d'où $[x] = 195, [2^1 x] \leq 391, [2^2 x] \leq 783, [2^3 x] \leq 1567, [2^4 x] \leq 3135, [2^5 x] \leq 6271$, et par consequent $\sum_{i=0}^{5}[2^i x] \leq 12342$.

Conclusion $S = \emptyset$.

Exercice. Soit $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
1) Montrer que : $\exists! p \in \mathbb{Z}, p10^{-n} \leq x < (p+1)10^{-n}$.
2) Donner une approximation décimale par excès et par défaut de x à 10^{-n} près.
3) Soit $x = x_0, x_1 x_2 ... \in \mathbb{R} - \mathbb{D}$, $x_0 \in \mathbb{N}$ et $x_i \in \{0, 1, .., 9\},\ i \geq 1$.
i) Exprimer x_i en fonction de p et des puissances de 10.
ii) Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrer que $[\sqrt{m^2 + m}] = m$ et $[10\sqrt{m^2 + m}] = 10m + 4$ et donner le premier chiffre après la virgule du nombre $\sqrt{m^2 + m}$. Appliquer au cas $m = 1$.

2.3 Récurrence

Principe de récurrence : *Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n \ldots$ des propriétés mathématiques. On suppose que :*
i) P_0 est vraie,
ii) Pour un $n \in N$ quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie aussi.
Alors, toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition d'objets mathématiques par récurrence : si on définit un objet x_0 puis si, pour chaque entier fixé n, on donne une manière de définir l'objet x_{n+1} à partir de l'objet x_n, alors les objets x_n sont bien définis pour tout n. On peut, par exemple, définir la suite $u_{n+1} = \sin(u_n),\ \forall n \geq 1$ et $u_0 \in \mathbb{R}$.

Problème 5 : [2]. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $a + b > 0$. Montrer que

$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq n},\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{1}{n(a+b)}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Solution : On va raisonner par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ découle du fait que

$$x^2 - (a+b)x + ab \leq 0,\ \forall x \in [a, b].$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons l'inégalité vraie pour $n - 1$ et montrons la pour n.

Considérons la fonction $f(x) = x - \frac{x^2}{a+b} + \sum_{i=1}^{n-1} x_i - \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2}{a+b}$. Il s'agit alors de montrer que $f(x_n) \geq \frac{ab}{a+b} n$. Pour cela on introduit la fonction g définie par $g(x) = x - \frac{x^2}{a+b}$. g admet $\frac{ab}{a+b}$ comme minimum sur $[a, b]$, d'où en utulisant l'H.R

$$f(x_n) \geq \frac{ab}{a+b} + \frac{ab}{a+b}(n-1) = \frac{ab}{a+b} n.$$

Problème 6 : [1]. Soient $x_1, .., x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + .. + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

Solution : On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ étant immédiat, supposons l'inégalité vraie pour toute famille de $n-1$ réels strictement positifs, et soient $x_1, .., x_n > 0$. Quitte à réordonner les n éléments, on peut supposer que $x_i \geq x_n, \ \forall i = 1, .., n$. Appliquant l'H.R à $x_1, .., x_{n-1}$, on s'apperçoit qu'il suffit de montrer que $(x_{n-1} - x_n)(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_1}) \geq 0$, qui découle du fait que $x_1 \geq x_n$ et $x_{n-1} \geq x_n$.

2.4 Densité

Théorème : Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour tout réels $x < y$, il existe un rationnel r tel que $x < r < y$.

Preuve : Soient x, y, x', y' des réels tels que $x < x' < y' < y$. Cherchons $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $x' \leq \frac{p}{q} \leq y'$ ou encore $qx' \leq p \leq qy'$. Une condition suffisante pour avoir un entier relatif entre qx' et qy' est $q(y'-x') \geq 1$, donc les deux entiers $q = E(\frac{1}{y'-x'})+1$ et $p = E(qx')+E(q(y'-x'))$ font l'affaire.

Remarque : En fait il existe une infinité de rationnels entre x et y. Plus précisement, on a la version séquentielle suivante : tout réel est limite d'une suite de rationnels. La suite n'est pas unique et on peut la choisir monotone. Pour $x \in \mathbb{R}$, les deux suites de terme général : $x_n = \frac{[nx]}{n}$ où $x_n = \frac{[nx]+1}{n}$ convergent vers x et on a : $x_n \leq x \leq y_n$.

Exercices : 1) On considère l'ensemble $E = \{r \in \mathbb{Q} / \ r^2 \leq 2\}$. Déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

2) Montrer que l'ensemble $\{r^3 \ / \ r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. (Indication : inspirez vous de la démonstration du théorème précédent ou de la remarque ci-dessus).

3) i) Soit (a_n) une suite réelle qui converge vers $+\infty$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(\frac{[a_n x]}{a_n})$ converge vers x.

ii) Retrouver la densité des ensembles $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

4) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = x, \ \forall x \in \mathbb{R}$. (Indication : Utiliser les deux suites (x_n) et (y_n) définies dans la remarque ci-dessus).

Problème 7 : [3]. Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, monotones sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

3 Les Inégalités

3.1 Exemples particuliers

Exercice : Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$$

Solution : Méthode 1. Appliquer le résultat du problème 6.

Méthode 2. Appliquer le résultat : $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,\ \forall x, y, z \geq 0.$

Méthode 3. On suppose que $c > b > a > 0$.

On a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3 = \frac{a-b}{b} + \frac{b-c}{c} + \frac{c-a}{a} \geq \frac{a-b}{b} + \frac{b-c}{b} + \frac{c-a}{b} = 0.$
Les autres cas sont à traiter de la même façon.

Problème 8 : [2]. Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha \geq \beta \geq \gamma > 0$.

$$\alpha^2.\frac{\beta}{\gamma} + \beta^2.\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma^2.\frac{\alpha}{\beta} \geq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Solution : On va exploiter l'inégalité : $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \geq 0$, pour montrer que

$$\alpha^2.\frac{\beta}{\gamma} + \beta^2.\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma^2.\frac{\alpha}{\beta} - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \geq 0$$

ou encore

$$\alpha^2(\frac{\beta}{\gamma} - 1) + \beta^2(\frac{\gamma}{\alpha} - 1) + \gamma^2(\frac{\alpha}{\beta} - 1) \geq 0$$

De $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\alpha - \gamma) \geq 0$, on obtient

$$\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta) \geq 0.$$

On en tire que

$$\beta^2(\frac{\gamma}{\alpha} - 1) \geq -\alpha\gamma(\frac{\beta}{\gamma} - 1) - \frac{\gamma^2\beta}{\alpha}(\frac{\alpha}{\beta} - 1)$$

Il s'en suit que

$$\alpha^2(\frac{\beta}{\gamma} - 1) + \beta^2(\frac{\gamma}{\alpha} - 1) + \gamma^2(\frac{\alpha}{\beta} - 1) \geq \alpha(\frac{\beta}{\gamma} - 1)(\alpha - \gamma) + \gamma^2(\frac{\alpha}{\beta} - 1)(1 - \frac{\beta}{\alpha}) \geq 0$$

CQFD.

Exercice : Inégalité de Bernoulli & application.
Soient x un réel tel que $x > -1$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

et déduire que pour tout entiers $m, n \geq 1$, on a

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{m}}} + \frac{1}{(m+1)^{\frac{1}{n}}} \geq 1$$

3.2 L'inégalité du réordonnement

On appelle permutation σ sur l'ensemble $\{1, .., n\},\ n \geq 1$, toute bijection de cet ensemble sur lui même. C'est une façon de réordonner les éléments $1, .., n$.

On a le résultat suivant :

Théorème : *Soient $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels. A chaque permutation σ, on associe la somme $S_\sigma = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$. Alors S_σ est maximale lorsque les deux suites $a_1, .., a_n$ et $b_{\sigma(1)}, .., b_{\sigma(n)}$ sont rangées dans le même ordre d'inégalités, et est minimale lorsqu'elle sont rangées dans l'ordre inverse d'inégalités.*

Preuve : Le max et le min de S_σ existent car le nombre de permutation est fini ($= n!$).

Montrons que toute permutation qui n'assure pas le même ordre entre les deux suites $a_1, .., a_n$ et $b_{\sigma(1)}, .., b_{\sigma(n)}$ n'est pas maximisante, soit donc σ une telle permutation. Alors il existe $1 \leq k < l \leq n$, tels que $a_k > a_l$ et $b_{\sigma(k)} < b_{\sigma(l)}$.

A partir de σ, on construit la permutation σ' suivante $\sigma'(i) = \sigma(i),\ \text{ si } i \notin \{k, l\}$, $\sigma'(k) = \sigma(l)$ et $\sigma'(l) = \sigma(k)$. La somme correspondante à σ' est donnée par

$$S_{\sigma'} = a_1 b_{\sigma(1)} + .. + a_k b_{\sigma(l)} + .. + a_l b_{\sigma(k)} + .. + a_n b_{\sigma(n)}$$

de sorte que $S_{\sigma'} - S_\sigma = (a_k - a_l)(b_{\sigma(l)} - b_{\sigma(k)}) > 0$, ce qui permet de conclure.

Remarques : 1) Si on a $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 ... \leq b_n$, alors S_σ est maximale pour $\sigma = Id$ et minimale pour $\sigma(i) = n - i + 1$.

2) On a l'interpretation commerciale suivante de l'inégalité du réordonnement : Si on regarde chaque a_i comme le prix d'un certain produit i et si $b_{\sigma(i)}$ désige le nombre de pièces à vendre de ce produit, alors l'I.R sinifie que l'on gagne plus d'argent lorsque l'on vend cher la plus grande partie de nos produits, et peu à bon marché, plutôt que le contraire.

Exemple : Retrouver les deux inégalités $x^2 + y^2 \geq 2xy$ et $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$, où $x, y, z \geq 0$.

3.3 L'inégalité de chebychev.

Théorème : *Soient $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels.*
1) Si $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 ... \leq b_n$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

2) Si $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ et $b_1 \geq b_2 ... \geq b_n$, alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i)$$

Preuve : On montre 1). L'I.R permet d'écrire

$$a_1 b_1 + .. + a_n b_n \geq a_1 b_1 + .. + a_n b_n,$$

$$a_1 b_1 + .. + a_n b_n \geq a_1 b_2 + .. + a_{n-1} b_n + a_n b_1,$$

$$\cdots$$

$$a_1b_1 + .. + a_nb_n \geq a_1b_n + .. + a_{n-1}b_{n-2} + a_nb_{n-1}.$$

En sommant terme à terme, on obtient la première inégalité.
La deusième s'obtient de la même façon.

Remarque : On peut aussi établir l'inégalité précédente directement, en effet pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on a : $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0 \Rightarrow \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$, ce qui donne

$$n\sum_{i=1}^{n} a_ib_i - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} b_i) \geq 0$$

Problème 9 : Olympiades Morocaines, (2005) [4]. x, y et z sont des réels strictement positifs vérifiant $xyz = 1$. Démontrer que

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+x)(1+z)} + \frac{z^3}{(1+y)(1+x)} \geq \frac{3}{4}$$

3.4 L'inégalité de la moyenne

Théorème : *Soient $x_1, .., x_n$ des réels strictement positifs. On a alors*

$$(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

La quantité $(\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\frac{1}{n}}$ (respectivement $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$) est appelée moyenne géométrique (respectivement arithmétique) des nombres $x_i,\ i = 1, .., n$.

Preuve : Posons $a_k = \dfrac{\prod_{i=1}^{k} x_i}{(\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{k}{n}}},\ k = 1, .., n$ et $b_k = \dfrac{1}{a_k}$.

D'après l'inégalité du réordonnement, on a :

$$a_1b_1 + .. + a_nb_n \leq a_1b_n + a_2b_1 + .. + a_nb_{n-1},$$

soit

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{(\prod_{k=1}^{n} x_k)^{\frac{1}{n}}}$$

ce qui donne le résultat.

Remarque : On peut aussi utiliser la concavité de la fonction $\ln$.

Exemple : Pour $n = 2, 3$ on retrouve les inégalités connues suivantes : $x^2 + y^2 \geq 2xy,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$ et $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz,\ \forall x, y, z \geq 0.$

Exercice : Soient $x_1, .., x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + .. + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

Solution : On a

$$\frac{1}{n}(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + .. + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1}) \geq (\frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}..\frac{x_n}{x_{n-1}}.\frac{x_n}{x_1})^{\frac{1}{n}} = 1\cdot$$

Problème 10 : Olympiade française (2003) [3]. Soient a, b et c trois réels strictement positifs tels que $abc \leq 1$. Prouver que

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} \geq a + b + c$$

Complément :

• L'inégalité de la moyenne permet d'avoir l'inégalité suivante

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}}$$

reliant la moyenne harmonique $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$ à la moyenne géométrique.

• Appliquant l'inégalité de Chebychev, on obtient l'inégalité :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

reliant la moyenne arithmétique à la moyenne quadratique.

• En résumé on a

$$\min_{1\leq i\leq n}(x_i) \leq \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} \leq (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \leq (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}} \leq \max_{1\leq i\leq n}(x_i)$$

3.5 L'inégalité de Cauchy-Schwarz

Cas du Plan : Soient a_1, a_2, b_1 et b_2 des réels. Alors on a

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

autrement dit si $\vec{a}(a_1, a_2)$ et $\vec{b}(b_1, b_2)$, alors $|\vec{a}.\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|$ avec égalité si : $(a_1, a_2)//(b_1, b_2)$.

Théorème : *Soient* $a_1, .., a_n, \ b_1, .., b_n$ *des réels. On a*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)}$$

avec égalité si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $a_i = \lambda b_i, \ \forall i = 1, .., n$ *ou* $b_i = \lambda a_i, \ \forall i = 1, .., n.$

Preuve : <u>Méthode 1</u> : Poser $A = (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2)$ et $B = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2$.

Remarquant d'abord que :

$$A = \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} a_i^2 b_j^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} a_i b_j + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_j b_i$$

et

$$B = (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i) = \sum_{i,j} a_i b_i a_j b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 b_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_i b_i a_j b_j$$

de sorte que

$$A - B = \sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i)^2$$

<u>Méthode 2</u> : L'inégalité étant vérifiée dans le cas $a_i = 0, \ i = 1, .., n$, on peut supposer que $(a_1, .., a_n) \neq 0$. Posons $a = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \ b = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ et $c = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$.

On considère le polynôme $P(x) = ax^2 - 2bx + c$ dont le discriminant réduit est $\delta = b^2 - ac$.

On a $P(x) = \sum_{i=1}^{n} (a_i x - b_i)^2 \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$, donc $\delta \leq 0$, ce qui permet de conclure.

Exercices : 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$,

$$(\sum_{k=1}^{n} a_k)(\sum_{k=1}^{n} b_k) = \sum_{1 \leq i,j \leq n}^{n} a_i b j.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (a_k)_{1 \leq k \leq n}, (b_k)_{1 \leq k \leq n} \subset \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \geq \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} b_k)^2} \tag{1}$$

(Indication : passer aux carrées et utuliser l'$\leq$ de C.S bidimensionnelle).

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\forall (x_k)_{1 \leq k \leq n}, \ (x_1 + .. + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + .. + x_n^2)$$

et donner le cas d'égalité.

Problème 11 : [2]. Soient $a_1, .., a_n,\ n \geq 2$ des réels. Montrer que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{a_i^2 + (1 - a_{i+1})^2} \geq n\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solution : On a

$$\sqrt{a_1 + (1-a_2)^2} + ... + \sqrt{a_{n-1} + (1-a_n)^2} + \sqrt{a_n + (1-a_1)^2} \geq \sqrt{(a_1 + ... + a_n)^2 + [n - (a_1 + .. + a_n)]^2}$$

Il suffit alors de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + (n-x)^2 \geq \frac{n}{2}$ et prendre $x = \sum_{k=1}^{n} a_i$.

Problème 12 : [1,2]. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'ensemble

$$E_n = \{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + (2k-1)^2} \ / \ \sum_{k=1}^{n} a_k = 17\}.$$

Montrer que $\exists!\ n \in \mathbb{N}$, / $\min(E_n) \in \mathbb{N}$.

Solution : On a $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k^2 + (2k-1)^2} \geq \sqrt{(\sum_{k=1}^{n} a_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} 2k-1)^2} = \sqrt{n^4 + 17^2}$, autrement dit, $\sqrt{n^4 + 17^2}$ est un minorant de E_n. D'autre part $\sqrt{n^4 + 17^2} \in E_n$, (il suffit de prendre $a_k = \frac{17(2k-1)}{n^2}$), donc $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\min(E_n) = \sqrt{n^4 + 17^2}$.

Supposons que $\sqrt{n^4 + 17^2} = p \in \mathbb{N}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $17^2 = (p - n^2)(p + n^2)$, un argumant arithmétique permet de montrer que $n = 12$.

N.B : Voir **[1]** pour d'autre méthodes.

3.6 L'inégalité triangulaire

Théorème : *Soient $a_1, .., a_n, b_1, .., b_n$ des réels. On a alors*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

avec égalité si $\exists \lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $a_i = \lambda b_i,\ \forall i = 1, .., n$ ou $b_i = \lambda a_i,\ \forall i = 1, .., n$.

Preuve : L'inégalité triangulaire est équivalente à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, en effet on a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Remarques : 1) On a la version géométrique suivante : pour tous points A, B, et C de l'espace affine, on a

$$AB \leq AC + CB$$

avec égalité dans le cas $C \in [AB]$.

2) Pour $n = 1$, l'I.T s'écrit $|x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Exercices : 1) Retrouver (1) en utilisant l'$\leq$ triangulaire.

2) Soit z un complèxe tel que $|z| < 1$. Montrer que

$$|\prod_{i=1}^{n}(1 + z^{2^i})| \leq \frac{1}{1 - |z|}$$

Solution : 2) D'après l'$\leq$ triangulaire, on a

$$|\prod_{i=1}^{n}(1 + z^{2^i})| \leq \prod_{i=1}^{n}(1 + |z|^{2^i})$$

d'où

$$|\prod_{i=1}^{n}(1 + z^{2^i})| \leq \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - |z|^{2^{i+1}})}{\prod_{i=1}^{n}(1 - |z|^{2^i})} = \frac{1 - |z|^{2^{n+1}}}{1 - |z|} \leq \frac{1}{1 - |z|}.$$

Problème 13 : [1,2,4]. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \ a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sqrt{a^2 + b^2 - ab} + \sqrt{b^2 + c^2 - bc} \geq \sqrt{a^2 + c^2 - ac}$$

Solution : Ecrivons

$$a^2 + b^2 - ab = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + (\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}})^2, ...$$

l'inégalité demandée découle de l'inégalité triangulaire ; appliquée aux points

$A\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \\ \frac{a}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ B\begin{pmatrix} \frac{b}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \ C\begin{pmatrix} \frac{c}{\sqrt{2}} \\ \frac{c}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$. (Les coordonnées étant par rapport à un R.O.N de l'espace affine usuel).

N.B : Voir [1] pour d'autres méthodes.

Problème 14 : [3]. Soit f une application de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}$ telle que $|f(r) - f(\rho)| \leq k|r - \rho|^2, \ \forall r, \rho \in \mathbb{Q}$, où $k > 0$.

Montrer que f est constante. (Indication : considérer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a < b$, une subdivision du ségment $[a, b]$ en des sous-intervalles de longueur $\frac{b - a}{n}$ et utiliser l'inégalité triangulaire..).

4 Equations et inéquations fonctionnelles

Une équation (respectivement inéquation) fonctionnelle est une équation (respectivement inéquation) dont l'inconnue est une fonction. On ne dispose pas de résultats généraux permettant de résoudre ce type de problèmes. Dans la suite on donnera, à travers quelques exemples, des idées qui peuvent aider à surmonter ces difficultés. Généralement on procède par condition nécessaire-condition suffisante.

4.1 Quelques situations simples

Problème 15 : (Slovénie 1999) [3]. Résoudre dans $\mathbb{R}^{I\!R}$ l'équation

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution : Soit f une solution possible, et soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche à calculer $f(x)$, d'où l'idée de se debarasser de y. En appliquant l'équation pour le couple $(x + f(0), 0)$, on obtient $f(x) = -x + a$, avec $a = 1 - f(0)$, il s'agit là d'une condition nécessaire sur une solution eventuelle f de notre équation. Cherchons si cette condition est suffisante. Soit $a \in \mathbb{R}$ et consiédrons la fonction $f : x \mapsto -x + a$. Une telle fonction est solution ssi $a = \dfrac{1}{2}$. En résumé il y a une seule solution : $f : x \mapsto -x + \dfrac{1}{2}$.

Problème 16 : [3]. Résoudre dans $\mathbb{R}^{I\!N}$ l'équation

$$u_{n+p} = u_n + u_p.$$

(Indication : Calculer les premiers termes et conjoncturer).

4.2 Versions séquentielles de quelques propriétés topologiques

Théorème : *Une fonction f est continue en un point $x_0 \in I$, (I étant un intervalle $\subset Df$) si, pour toute suite (x_n) qui converge vers x_0, la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x_0)$.*

Preuve : *La démonstaration, laissée en exercice, est basée sur la définition de la continuité en un point et celle de la limite d'une suite.*

Problème 17 : (Suède 1962) [3]. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x et tout rationnel r, on a :

$$|f(x) - f(r)| \leq 7(x - r)^2.$$

Solution : Méthode 1 : On commence d'abord par montrer que l'inégalité s'étend au cas ou $r \in \mathbb{R}$. Soit donc $y \in \mathbb{R}$, et soit (r_n) une suite de rationnels qui converge vers y.

On a $|f(y) - f(r_n)| \leq 7(y - r_n)^2$, à la limite on obtient que $f(r_n)$ tend vers $f(y)$. On applique maintenant l'inégalité pour x et r_n, ce qui donne à la limite $|f(x) - f(y)| \leq 7(x - y)^2$, ceci permet de déduire que f est dérivable de dérivée nule sur $\mathbb{R}$, ou encore que f est constante.

Méthode 2 : Inspirer vous de la technique utilisée dans le problème 14, (voir [3] pour les détails).

Problème 18 : [3]. 1) Chercher toutes les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

2) Chercher toutes les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

3) Chercher toutes les fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}^*$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

4.3 Points fixes d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que a est un point fixe de f si $a \in Df$ et $f(a) = a$.

Remarque : S'il existe un itéré $f^k,\ k \in \mathbb{N}$ de f qui a un point fixe unique, alors f admet un point point fixe unique.

Problème : I) Soit f une fonction définie sur un segment $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
On suppose que f vérifie la condition suivante :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y| \tag{2}$$

Le but ici est de montrer que f possède un point fixe unique c dans $[a, b]$.
1) Montrer que si c existe, alors il est unique.
2) Existance de c : On considère la fonction g suivante :

$$\begin{array}{llll} g: & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & |f(x) - x| \end{array}$$

i) Montrer que g admet un minimum m.
ii) Montrer que $m = 0$. En déduire l'existance de c.
3) Retrouver le résultat en utilisant le théorème des valeurs intermédéaires.
4) Dans cette question, on remplace la condition (2) par la suivante :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ \ |f(x) - f(y)| \leq |x - y|$$

Discuter dans ce cas les résultats des questions 1) et 2) tout en donnant un exemple.

II) Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective sur $[a, b]$.
On veut montrer que f est strictement monotone sur $[a, b]$. Soit $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2\ /\ f([a, b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$.
1) On suppose que $\alpha < \beta$.
i) Montrer que $\alpha = a$ et $\beta = b$
ii) Supposons que $\exists\ (x, y) \in [a, b]^2\ /\ x < y$ et $f(x) \geq f(y)$. Montrer que $\exists\ t \geq y\ /\ f(x) = f(t)$, et déduire que $y \leq x$.
2) Conclure.

III) Soit $f : [a, b]) \longrightarrow [a, b]$ une fonction vérifiant :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$$

et soit $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$
$1)a-$ Justifier l'existance de c.

$b-$ Montrer que f est strictement monotone sur $[a, b]$.
2) En déduire l'expression de f.

IV) On considère une fonction $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue sur $[a, b]$ et telle que :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \geq |x - y|$$

1) Montrer que f est strictement monotone sur $[a, b]$.

2) Montrer que $f = id_{[a,b]}$ ou bien $f = (a + b) - id_{[a,b]}$.

V) 1) Montrer que toute fonction f définie et continue sur un intervalle I et vérifiant $f(x) \neq 0, \forall x \in I$; garde un signe constant sur I.
2) Soit f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ et vérifiant :

$$[a, b] \subset f([a, b]) \tag{3}$$

$a-$ Montrer que la condition (3) est équivalente à $\{a, b\} \subset f([a, b])$.
$b-$ Montrer que f admet au moins un point fixe dans $[a, b]$.

Thórème : *Suites réccurentes.*
Soit f une fonction définie sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, alors on peut définir une suite (u_n) par : $u_{n+1} = f(u_n), \quad u_0 = a \in I$. Si de plus (u_n) est convergente de limite $l \in I$ et f est continue sur I, alors $f(l) = l$.

Remarque : Si $l \notin I$, on peut se contenter du prolongement par continuité de f.

Propriétés de la suite (u_n) :
- *Cas où f est croissante : (u_n) est alors monotone, et la nature de cette monotonie est déterminée par les deux premiers termes. Donc si, par exemple, I est borné, la suite est convergente et le résultat précédant s'applique pour calculer la limite.*
- *Cas où f est décroissante : $f \circ f$ est alors croissante, ceci conduit à considérer les deux suites (u_{2n}), et (u_{2n+1}), on se ramène alors au cas précédant. Si, par exemple, I est borné et si $f \circ f$ admet un point fixe unique dans I, alors $\lim(u_{2n}) = \lim(u_{2n+1})$ et (u_n) est alors convergente.*

Exercice : On considère la fonction $f = \sin$. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite $(f^n(a))$ est convergente. ($f^0 = id,\ f^n = f \circ f \circ .. \circ f,\ n$ fois).

Problème 19 : [1,2]. Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $a_1 \in \mathbb{R}$ et $a_{n+1} = 1 + a_1 a_2 ... a_n$. Etudier la convergence de la suite (a_n), et calculer la limite de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$ lorsqu'elle est bien définie.

Problème 20 : [3]. Trouver toutes les applications $f : [0, 1] \to [0, 1]$ strictement croissantes et continues telles que :

$$f(x) + f^{-1}(x) = 2x,\ \forall x \in [0, 1]$$

(Indication : Montrer que pour tout x la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est arithmétique).

4.4 Polynômes

Exercice : Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 9x + 6$, et soient x_1, x_2, x_3 ses racines dans $\mathbb{C}$. Calculer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Problème 21 : [1]. Olympiade française 2007, (Romaine 1995). Trouver tous les polynômes P de degré impair ou inférieur ou égal à zéro, tels que pour tout réel x,

$$P(x^2) = P(x)P(x-1).$$

On rappelle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $deg(\lambda) = 0$, si $\lambda \neq 0$ et $deg(0) = -\infty$.

Solution : Il est clair que les seuls polynômes constants qui vérifient l'équation sont 0 et 1. Supposons que $deg(P)$ est un entier impair, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, P admet une racine réelle α. Il est alors clair que les α^{2^k}, $k \in \mathbb{N}$ sont des racines de P, qui sont 2 à 2 $\neq$ lorsque $\alpha \notin \{-1, 0, 1\}$ auquel cas P est le polynôme nul.

Supposons maintenant que $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$. Alors on peut voir qu'on peut se ramener au cas $\alpha = 1$. Ceci implique que 4 est aussi une racine de P, ce qui nous ramène au cas précédent.

Problème 22 : [1]. Soit P un polynôme à coéfficients réels tel que $P(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Prouver qu'il existe des polynômes P_1, P_2 à coéfficients réels tels que :

$$P = P_1^2 + P_2^2.$$

Solution : Si le polynôme P n'est pas constant, il s'écrit sous l'une des formes :

$$P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(x - a_i)^2, \ P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{m}(x^2 + a_i x + b_i), \ P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)^2 \prod_{i=1}^{m}(x^2 + a_i x + b_i),$$

où $\lambda, \alpha_i, a_i, b_i$ sont des réels tels que $\lambda \geq 0$ et $a_i^2 - 4b_i < 0, \ i = 1, .., m$. Il suffura donc de montrer que l'ensemble $\{Q^2 + R^2 \ / \ Q, R \in \mathbb{R}[X]\}$ est stable par rapport à la multiplication, ce qui peut se faire en utilisant l'identité de Lagrange suivante :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2,$$

pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, qui découle de la propiété du module dans $\mathbb{C}$: $|zz'| = |z||z'|$.

Problème 23 : Soit $P(X) = \lambda \prod_{i=1}^{m}(X - a_i)^{\alpha_i} \in \mathbb{R}[X]$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{R}$ et $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m} \subset \mathbb{N}^*$. Montrer que $P"P \leq P'^2$, et donner le cas d'égalité.

5 Problèmes d'entrainement

I. Olympiades Bulgares, (1996) [1]. Soit $(a_n) \subset \mathbb{R}$ une suite telle que $a_1 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + \dfrac{n}{a_n}$, $\forall n \geq 1$. Montrer que pour tout $n \geq 4$, on a : $[a_n^2] = n$.

II. Olympiades Morocaines, (2004) [4]. a, b et c sont des réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

Démontrer que
$$|a| + |b| + |c| - abc \leq 4.$$

III. USA, (1978) [3]. Soient a, b, c, d, e des réels tels que
$$a + b + c + d + e = 8 \text{ et } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 16.$$

Quelle est la valeur maximale de e.

IV. Olympiades internationales, (2008) [3]. (a) Montrer que
$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$
pour tous nombres réels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres rationnels x, y, z différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$ pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

V. Olympiades Morocaines, (2009) [4]. Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet trois solutions distinctes α, β et γ et calculer la somme
$$S = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} + \frac{1+\beta}{1-\beta} + \frac{1+\gamma}{1-\gamma}.$$

VI. Olympiades internationales, (1988) [1]. Montrer que l'ensemble des réels x qui vérifient l'inéquation $\displaystyle\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geq \frac{5}{4}$ est la réunion d'intervalles disjoints dont la somme des longueurs a pour valeur 1988.

VII. Olympiades chinoises, (1992) [1]. Soient $a_0, a_1, .., a_n$ des réels tels que

$0 < a_0 \leq a_1 \leq .. \leq a_{n-1} \leq 1$. Soit λ une racine complèxe du polynôme $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + .. + a_1 x + a_0$ vérifiant $|\lambda| \geq 1$. Prouver que $\lambda^{n+1} = 1$.

VIII. Olympiades Morocaines, (2004) [4]. Déterminer toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et telles que :
$$f(xf(y)) = f(xy) + x,$$
pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

IX : Olympiades françaises, (2004) [3]. Déterminer tous les couples (a, b) de réels positifs ou nuls pour lesquels il n'existe qu'une seule fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante :
$$f(f(x)) + f(x) = ax + b,$$
pour tout $x \in \mathbb{R}$.

X : Olympiades françaises, (2003) [3]. On considère l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante : $\forall s \in \mathbb{N}^\star, \forall t \in \mathbb{N}^\star, \quad f(t^2 f(s)) = sf(t)^2$.

1) Prouver que la valeur minimale de $f(2003)$ lorsque f parcourt l'ensemble précédent est 2.

2) Déterminer la valeur minimale de $f(2002)$ lorsque f parcourt l'ensemble précédent.

6 Sujet du concours & corrigé

UMI-ENSAM-AREF : Meknès-Tafilalt
Epreuve O2A. 2009-2010
Durée : 4h.

Exercice 1
Déterminer les mesures des angles d'un triangle rectangle ABC tel que M est le milieu de l'hypothénuse $[BC]$ et $AM^2 = AB \cdot AC$.

Exercice 2
Déterminer le plus grand entier n tel que $n + 10$ divise $n^3 + 100$.

Exercice 3
Les deux questions sont indépendantes.

1. *On considère des entiers $0 \leq l \leq k \leq n$. Montrer que*

$$\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l},$$

en utilisant une méthode combinatoire en comptant de deux façons différentes le nombre de couples (L, K) tel que L, K sont deux sous-ensembles de $[n]$ avec $L \subseteq K$ et $|K| = k$, $|L| = l$.

2. *Quel est le nombre chromatique du graphe $G = (V, E)$ de la figure FIG.1 ci-dessous et donner un coloriage avec $\chi(G)$ couleurs.*

Exercice 4
On considère deux nombres réels a et b strictement positifs tel que $a + b = 1$. Montrer que

$$(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{a})^2 \geq \frac{25}{2}$$

Exercice 5
[1] *Trouver une progression arithmétique (u_n) infinie d'entiers naturels telle qu'aucun terme u_n n'est la somme de deux cubes parfaits. En d'autres termes, il n'existe aucune paire (a, b) d'entiers naturels telle que $u_n = a^3 + b^3$.*

[1] supplémentaire

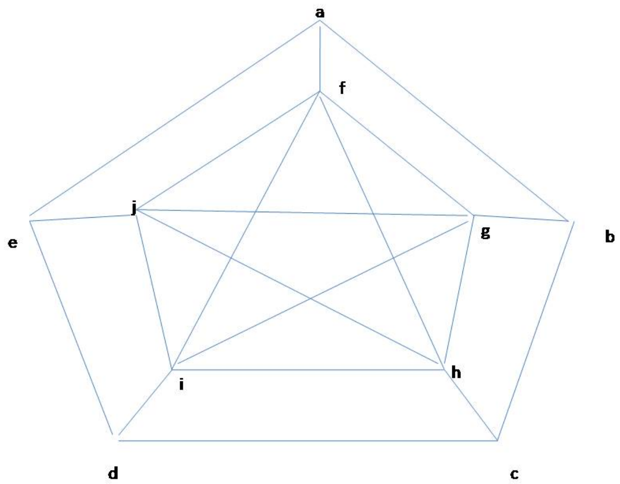

FIG. 1 – Graphe G : $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ Les arêtes E sonts représentées par des traits reliants les sommets

Corrigé

Exercice 1. Posons $x = \sin(B)$ et $y = \sin(C)$. Le triangle ABC, étant rectangle en A, on a $x^2 + y^2 = 1$. D'autre part on a $xy = \dfrac{AC}{BC} \cdot \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AM^2}{BC^2} = \dfrac{1}{4}$. Autrement dit x^2 et y^2 sont les deux racines du trinôme

$$X^2 - X + \frac{1}{16} = 0$$

Donc, tenant compte de la symétrie des rôles de x et de y, on peut écrire $x^2 = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$. En utilisant la relation trigonométrique $\sin^2(\theta) = \dfrac{1-\cos(2\theta)}{2}$, on déduit que $\hat{\text{B}} = \dfrac{\pi}{12}$ et par suite $\hat{\text{C}} = \dfrac{5\pi}{12}$.

Exercice 2. De $n \equiv -10\ [n+10]$, on tire $n^3 + 10^2 \equiv 10^3 - 10^2\ [n+10]$, et par conséquant on a

$$n + 10 | n^3 + 10^2 \Leftrightarrow 10^3 - 10^2 \equiv 0\ [n+10] \Leftrightarrow n + 10 | 10^3 - 10^2$$

La valeur maximal cherchée de n est donc celle pour laquelle on $n + 10 = 10^3 - 10^2$ i.e. $n = 10^3 - 10^2 - 10 = 890$.

Exercice 3. 1. On va utiliser le principe fondamental du dénombrement. On a $\mathcal{C}_n^l$ façon pour choisir la partie L, une fois fixé L, on a $\mathcal{C}_{n-l}^{k-l}$ façon pour complèter L en vu de former une partie à k élémants : $K \supset L$, ce qui donne $\mathcal{C}_n^l\mathcal{C}_{n-l}^{k-l}$ possibilités pour former le couple (L, K). En faisant de même, en commençant cette fois par choisir K, on obtient la relation demandée.

2. Comme G possède un sous-graphe complet de taille 5, alors on a $\chi(G) \geq 5$. De plus la figure FIG.2 ci-dessous montre que l'on peut réaliser une coloration de G en 5 couleurs. Par conséquent $\chi(G) = 5$.

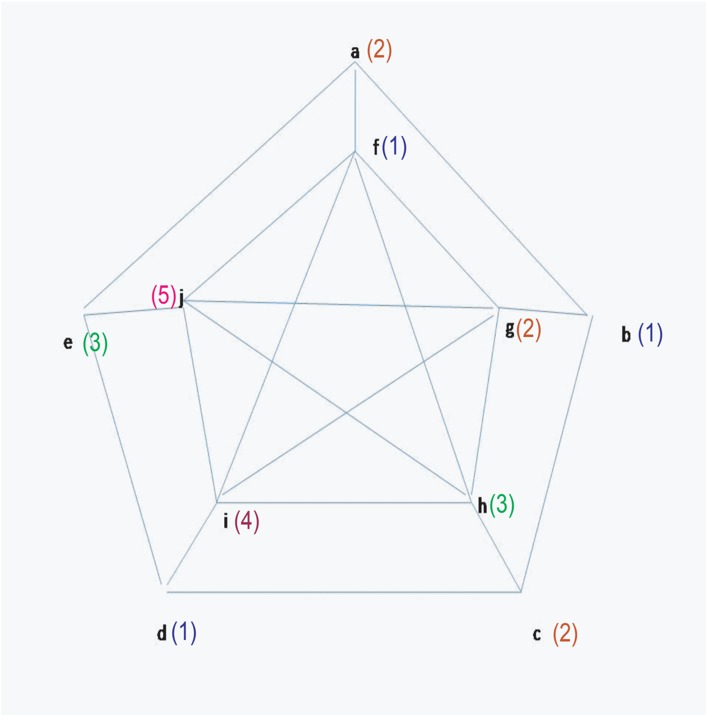

FIG. 2 – `(x)` représente la couleur `x`. Exp : `b(1)` signifie que le sommet `b` a la couleur `1`.

N.B. On peut aussi montrer que $\chi(G) \leq 5$ par le Théorème de Brooks (1941), qui s'applique ici puisque le graphe G est connexe, de degré maximal 5 et n'est ni complet ni un cycle impair.

Exercice 4. En appliquant l'$\leq$ de Cauchy-Schwartz aux vecteurs $\begin{pmatrix} a+\frac{1}{b} \\ b+\frac{1}{a} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$2((a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2) \geq (a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2 = (1+\frac{1}{a(1-a)})^2$$

une condition suffisante pour avoir l'inégalité

$$(a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2 \geq 25 \qquad (3) \tag{4}$$

est que

$$1+\frac{1}{a(1-a)} \geq 5$$

ou encore (puisque $0 < a < 1$), $4a^2-4a+1 \geq 0$ ce qui est vrai.

N.B. De

$$2((a+\frac{1}{b})^2+(b+\frac{1}{a})^2) \geq (1+\frac{1}{a(1-a)})^2 \geq 25,$$

on déduit qu'on a égalité dans (4) ssi $4a^2-4a+1 \geq 0$ soit $a=b=\frac{1}{2}$.

On peut aussi obtenir ce dernier résultat, en utilisant le fait que l'= dans C.S a lieu ssi

$$\begin{pmatrix} a+\dfrac{1}{b} \\ b+\dfrac{1}{a} \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{a} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$$

(tenant compte du fait que $0 < a, b < 1$ et $a+b=1$).

Exercice 5. Il s'agit de chercher $\alpha \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^*$ tels que $\nexists n, a, b \in \mathbb{N} /\ \alpha + rn = a^3 + b^3$. Pour cela, on va se contenter de la congruence, plus précisement on va chercher $\alpha \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}^*$ de sorte que pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ on a $a^3 + b^3 \not\equiv \alpha\ [r]$.

Modulo 7, on a $a^3 \in \{0, 1, 6\}$ et donc (toujours modulo 7) $a^3 + b^3 \in \{0, 1, 2, 5, 6\}$. Donc la suite $u_n = 3 + 7n$ fait l'affaire.

7 Réferences

[1] Les olympiades de mathématiques : Réflexes et stratégies, Tarik Belhaj Soulami. Edition Ellipses, Paris 1999.

[2] Manuel scolaire : Première Bac, option sciences mathématiques, ministère de l'éducation nationale, 1996.

[3] Site : http ://www.animath.fr/old/tutorat.html.

[4] Sujets d'olympiades Morocaines : Académie régionale de l'eduction et de la formation, région Meknès-Tafilalet.